Titre
Etude numérique de la perte de régularité des solutions des équations de l'hydrodynamique et de la magnétohydrodynamique.

Title
Numerical study of loss of regularity of the solutions of hydrodynamical and magnetohydrodynamical equations.

Mots clés
Méthodes semi-Lagrangiennes d'ordre arbitrairement grand, Equations d'Euler et de Navier-Stokes incompressibles, Equations de la magnétohydrodynamique, Equations des Invariants de Cauchy, Méthode de Cauchy-Lagrange, Méthodes multirésolution adaptatives en bases d'ondelettes.

Keywords
Semi-Lagrangian methods of arbitrary high order, Incompressible Euler and Navier-Stokes equations, Magnetohydrodynamical equations, Cauchy invariants equation, Cauchy-Lagrange methods, Adaptive multiresolution methods based on wavelets representation.

Thématiques/Domaines
Mathématiques appliquées (Equations aux dérivées partielles EDPs, Analyse numérique, Analyse des EDPs), Calcul Scientifique Haute Performance (Algorithmes parallèles), Mécanique des fluides (Géophysique), Physique des plasmas (Plasmas magnétisés de fusion par confinement magnétique et inertiel, Plasmas spatiaux et astrophysiques, Géo-dynamo).

Thematics/Domains
Applied mathematics (Partial differential equations PDEs, Numerical analysis, Analysis of PDEs), High-performance scientific computing (Parallel algorithms), Fluid mechanics (Geophysics), Plasma physics (Magnetized plasmas of fusion by magnetic and inertial confinement, Space and astrophysical plasmas, Geo-dynamo).

Contexte et Projet de Thèse (objectifs, méthodes et résultats attendus)
Ces dernières années, il y a eu un intérêt croissant pour l'étude mathématique et numérique de la perte de régularité (formation de singularité en temps fini) pour les solutions des équations d'Euler et de Navier-Stokes incompressibles (Luo & Hou 2014, Elgindi & Jeong 2019, Hou & Huang 2021, Hertel et al. 2022, Elgindi 2021, Drivas & Elgindi 2022).
Récemment nous avons mis au point une nouvelle méthode semi-Lagrangienne d'ordre arbitrairement élevé, appelée méthode « Cauchy-Lagrange » (Besse & Frisch 2017 CMP, Besse 2020, Hertel et al. 2022), pour explorer numériquement la formation potentielle de singularité en temps fini dans les équations d'Euler incompressibles sur un domaine borné ou périodique. Cette méthode numérique originale est basée sur l'équation des invariants de Cauchy, une formulation Lagrangienne des équations d'Euler incompressibles. En outre, nous avons étendu ces formulations Lagrangiennes, basées sur les invariants de Cauchy, à des modèles magnétohydrodynamiques non-dissipatifs (Besse & Frisch 2017 JFM, Besse 2022), mais aussi à des modèles (magnéto-)hydrodynamiques dissipatifs sur des variétés (Besse 2020, Besse 2023).
En s'appuyant sur les travaux précédemment cités, cette thèse a pour but de concevoir de nouveaux schémas numériques semi-Lagrangiens d'ordre très élevé pour les équations d'Euler et de Navier-Stokes incompressibles à trois dimensions, en vue d'explorer numériquement des questions fondamentales ouvertes comme l'existence ou non de singularités en temps fini (perte de régularité des solutions classiques). Ces questions font d'ailleurs l'objet d'un des problèmes du millénaire posés par l'Institut de mathématiques Clay. Selon des travaux récents (Luo & Hou 2014, Hou & Huang 2021, Hertel et al. 2022, Elgindi & Jeong 2019, Drivas & Elgindi 2022), la forme du domaine de l'écoulement et la présence ou non de frontières impénétrables peuvent fortement conditionner la

présence ou non de cette perte de régularité. De plus dans ces travaux, il a été constaté que les singularités potentielles sont fortement localisées à la fois en espace et en temps. Par conséquent le développement de schémas numériques semi-Lagrangiens sur des maillages adaptatifs semble incontournable si on souhaite s'approcher au plus près (en temps) de la singularité tout en conservant une résolution spatiale suffisante. Pour ce faire, on pourra s'inspirer des méthodes semi-Lagrangiennes multi-résolutions adaptatives que nous avons récemment développées dans un autre contexte (Besse et al. 2017) et qui reposent sur une représentation multi-échelles en bases d'ondelettes des quantités inconnues.

Ces schémas numériques pourront naturellement s'étendre à d'autres modèles fluides pour lesquels une description via des équations généralisées des invariants de Cauchy est disponible. C'est par exemple le cas pour des modèles compressibles comme les équations des fluides barotropes ou les équations d'Euler-Poisson pour la physique des plasmas ou l'astrophysique. C'est aussi le cas de la magnétohydrodynamique électronique ou e-MHD (Besse 2022) qui joue un rôle fondamental dans l'étude de la stabilité des plasmas de fusion (Projet ITER). D'autres modèles MHD, dissipatifs ou non dissipatifs, posés dans un espace Euclidien ou sur une variété, plus réalistes pour des applications en physique des plasmas et connus sous les noms de MHD Hall et MHD étendue possèdent aussi une description via des équations généralisées des invariants de Cauchy (Besse & Frisch 2017 JFM, Besse 2023). En particulier pour les systèmes dissipatifs (e.g., termes de diffusion, opérateur Laplacien) l'équation des invariants de Cauchy doit se comprendre d'un point de vue statistique, c'est-à-dire comme la moyenne sur un ensemble de réalisations (aléatoires) des trajectoires Lagrangiennes. Cette représentation Lagrangienne stochastique permettra aussi de développer de nouvelles méthodes numériques probabilistes (basées sur le couplage entre une équation différentielle stochastique et l'équation des invariants de Cauchy) pour résoudre les équations de Navier-Stokes, ainsi que les équations de la magnétohydrodynamique visqueuse et résistive (Besse 2023). En outre, on peut aussi étendre les méthodes Cauchy-Lagrange à des équations dissipatives (e.g., transport de Lie plus opérateur Laplacien) en utilisant des techniques de pas fractionnaire (« splitting ») d'opérateurs.

Si le candidat est intéressé par des études mathématiques, à l'instar de ce qui a été fait pour les fluides neutres (Hernandez 2019), il pourrait démontrer l'analyticité ou la non-analyticité en temps des trajectoires Lagrangiennes pour plusieurs modèles magnétohydrodynamiques (e.g., Besse 2022). Par ailleurs il serait très intéressant d'étendre les travaux d'Elgindi (Elgindi & Jeong 2019, Elgindi 2021), concernant la preuve mathématique de la formation de singularité en temps fini dans les équations d'Euler incompressibles, au cas de certains modèles magnétohydrodynamiques incompressibles (e.g., la MHD idéale incompressible 3D axisymétrique). Il serait aussi très utile de faire l'analyse mathématique des schémas numériques (preuve de stabilité, preuve de convergence, conservations et estimations a priori) que le candidat aura mis en oeuvre.

Enfin, des applications plus pratiques, faisant intervenir une géométrie courbe (Besse 2020, Besse 2023), existent en géophysique, où l'on cherche par exemple à faire de la prévision météorologique rapide et précise en s'affranchissant des contraintes dites de Courant-Friedrichs-Lewy sur les pas de temps (Nair et al. 2005, Mininni et al. 2007). Des problèmes analogues se posent en géo-dynamo pour l'évolution dynamique du champ magnétique autour d'une planète (Kono & Roberts 2002, Zhang & Schubert 2000). Cette thèse peut donc avoir des applications assez variées dans les domaines suivants: mathématiques appliquées, mécanique des fluides, géophysique, géo-dynamo, physique des plasmas et astrophysique.

Context and Thesis Project (objectives, methods and expected results)

In recent years, there has been growing interest in the mathematical and numerical study of loss of regularity (potential singularity formation in finite time) of the solutions of the incompressible Euler and Navier-Stokes equations (Luo & Hou 2014, Elgindi & Jeong 2019, Hou & Huang 2021, Hertel et al. 2022, Elgindi 2021, Drivas & Elgindi 2022).

Recently we have designed a novel semi-Lagrangian method of arbitrary high order, called the « Cauchy-Lagrange » method (Besse & Frisch 2017 CMP, Besse 2020, Hertel et al. 2022), to explore numerically the potential finite-time singularity formation in incompressible Euler equations posed on a bounded domain or in a periodic box. This original numerical method is based on the Cauchy invariants equation, which is a Lagrangian formulation of the incompressible Euler equations. Furthermore, we have generalized this Lagrangian formulation, based on Cauchy invariants, not only to non-dissipative magnetohydrodynamical models (Besse &Frisch 2017 JFM, Besse 2022) but also to dissipative (magneto-)hydrodynamical models on manifolds (Besse 2020, Besse 2023)

Based on the previously cited works this PhD thesis aims at designing new numerical semi-Lagrangian schemes of very high order for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations in three dimensions. These will be used for the numerical exploration of open fundamental questions, such as the existence or not of finite-time singularities (blowup of classical solutions). These questions are listed among the millenium problems posed by the Clay mathematical Institute. According to recent works (Luo & Hou 2014, Hou & Huang 2021, Hertel et al. 2022, Elgindi & Jeong 2019, Drivas & Elgindi 2022), the shape of the domain of the flow and the presence or not of impenetrable boundaries can play an important role for blowup. Moreover in these works it has been observed that the potential singularities were strongly localized both in space and time. Consequently, the development of semi-Lagrangian schemes on adaptive meshes seems crucial if one wants to approach as close as possible (in time) to the singularity while maintaining sufficient spatial accuracy. For this, we can take advantage of the adaptive multiresolution semi-Lagrangian methods that we have recently developed in another context (Besse et al. 2017) and which are based on a multi-scale representation of the unknowns by using wavelet bases.

These numerical schemes can naturally be extended to other fluid models for which a description by generalized Cauchy invariants equations is available. This is for example the case for some compressible models, such as the barotropic fluid equations and the Euler-Poisson equations for plasma physics or astrophysics. This is also the case for the electron magnetohydrodynamics, the so-called e-MHD (Besse 2022), which plays a fundamental role in the study of stability of fusion plasmas (ITER project). Some other MHD models, dissipative or non-dissipative, posed in a Euclidean space or on a manifold, more realistic from the point of view of plasma physics, and known as Hall MHD and extended MHD also admit a description via generalized Cauchy invariants equations (Besse & Frisch 2017 JFM, Besse 2023). In particular, for dissipative models (e.g., diffusion terns, Laplacian operator) the Cauchy invariants equation must be understood from a statistical point of view, i.e., as the average over an ensemble of (random) realizations of the Lagrangian trajectories. This stochastic Lagrangian representation will allow us to develop new probabilistic numerical methods (based on the coupling between a stochastic differential equation and the Cauchy invariants equation) to solve the Navier-Stokes equations, and also the viscous and resistive magnetohydrodynamics (Besse 2023). Furthermore, one may extend Cauchy-Lagrange methods to dissipative equations (e.g., Lie transport operator plus Laplacian operator) by using operator splitting technics.

A candidate interested in engaging in more mathematical work may prove or disprove the time-analyticity of Lagrangian trajectories for several magnetohydrodynamical models (Besse 2022), as it has been done for some neutral fluid models (Hernandez 2019).
Furthermore, it will be very interesting to extend the work of Elgindi (Elgindi & Jeong 2019, Elgindi 2021), concerning the mathematical proof of finite-time blowup in incompressible Euler equations, to the case of some incompressible magnetohydrodynamical models (e.g., the 3D-axisymmetric incompressible ideal MHD). It will also be very useful to perform the mathematical analysis of the numerical schemes (proof of stability, proof of convergence, conservations and a priori estimates) that the candidate will have implemented.

Finally, more practical applications, involving a curved geometry (Besse 2020, Besse 2023), exist in geophysics where one tries for example to perform fast and precise meteorological forecast, while avoiding the so-called Courant-Friedrichs-Lewy constraint on the time steps (Nair et al. 2005, Mininni et al. 2007). Similar problems arise in geo-dynamo for the dynamic evolution of the magnetic field around a planet (Kono & Roberts 2002, Zhang & Schubert 2000). Therefore this thesis has various applications in a number of areas: applied mathematics, fluid mechanics, geophysics, geo-dynamo, plasma physics and astrophysics.

Informations complémentaires sur l'encadrement de la thèse
La thèse sera encadrée par Nicolas Besse (Professeur des Universités, Observatoire de la Côte d'Azur, Nice) au sein l'équipe Turbulence Fluide et Plasma (TFP) du Laboratoire J.-L. Lagrange de l'Observatoire de la Côte d'Azur (OCA) à Nice. Ce travail de thèse pourra bénéficier de collaborations scientifiques internationales régulières et bien établies de l'équipe TFP dans le domaine avec différents pays: Inde (Rahul Pandit, IIS Bengalore; Samriddhi Sankar Ray, ICTS Bengalore), Autriche (Norbert Mauser, WPI Université de Vienne, Hans-Peter Stimming WPI Université de Vienne), et Japon (Takeshi Matsumoto, université de Kyoto). Ce travail de thèse pourra aussi bénéficier de collaborations scientifiques locales bien établies entre l'équipe TFP et le milieux Niçois de la mécanique des fluides numériques (équipe « Modélisation Numérique et Dynamique des Fluides » du LJAD, équipe « Physique Non-linéaire et Hors-équilibre » de l'INPHYNI, et l'équipe « Computing and Fluids » du CEMEF).

Further informations on the supervision of the PhD thesis
This PhD thesis will be supervised by Nicolas Besse (Full Professor, Observatoire de la Côte d'Azur, Nice) in the Fluid and Plasma Turbulence (FPT) team of the J.-L. Lagrange laboratory at Observatoire de la Côte d'Azur (OCA) in Nice. The thesis work will take advantage of regular and well-established scientific international collaborations of the FPT team in the domain with different countries: India (Rahul Pandit, IIS Bengalore; Samriddhi Sankar Ray, ICTS Bengalore), Austria (Norbert Mauser WPI Wien university, Hans-Peter Stimming WPI Wien university), and Japan (Takeshi Matsumoto, Kyoto university). The thesis work will also benefit from well-established local scientific collaborations between the FPT team and the Nice community of computational fluid mechanics (team « Modélisation Numérique et Dynamique des Fluides » at the LJAD, team « Physique Non-linéaire et Hors-équilibre » at INPHYNI, and team « Computing and Fluids » at CEMEF).

Profil, connaissances et compétences requises
Le candidat devra maitriser le calcul scientifique (Fortran 90, MPI, OpenMP, C, C++), l'analyse numérique (schémas numériques d'ordre élevé) et posséder des notions sur les méthodes mathématiques pour les équations de la mécanique des fluides (équations d'Euler, équations de Navier-Stokes, MHD idéale incompressible, lois de conservation hyperboliques, ...). La connaissance approfondie des schémas numériques d'ordre élevé, des principales propriétés des lois de conservation hyperboliques, ainsi que des propriétés des équations d'Euler et de Navier-Stokes, et de la magnétohydrodynamique idéale incompressible serait appréciée, mais pourra également être acquise au cours du travail de thèse.

Prerequisites, skills and profile
The applicant should possess a strong knowledge of scientific computing (Fortran 90, MPI, OpenMP, C, C++) and of numerical analysis (high-order numerical schemes) and have some notions of mathematical methods for fluid mechanics equations (Euler equations, Navier-Stokes equations, ideal incompressible MHD, hyperbolic conservation laws, ...). In-depth knowledge of high-order numerical schemes, mathematical properties of hyperbolic conservation laws, Euler and Navier-Stokes equations and of the incompressible ideal magnetohydrodynamic equations would be appreciated but can be acquired along the PhD thesis.

Bibliographie/Bibliography

N. Besse, "Stochastic Lagrangian perturbation of Lie transport and applications to fluids", Nonlinear Analysis 232 (2023) 113249.

N. Besse, "Lagrangian regularity of the electron magnetohydrodynamics flow on a bounded domain", J. Math. Anal. Appl. 511 (2022) 126076.

N. Besse, “Regularity of the geodesic flow of the incompressible Euler equations on a manifold”, Commun. Math. Phys. 375 (2020) 2155-2189.

N. Besse, E. Deriaz, E. Madaule, “Adaptive multiresolution semi-Lagrangian discontinuous Galerkin methods for the Vlasov equations”, J. Comput. Phys. 332 (2017) 376-417.

N. Besse, U. Frisch, “A constructive approach to regularity of Lagrangian trajectories for incompressible Euler flow in a bounded domain”, Commun. Math. Phys. 351 (2017) 689-707.

N. Besse, U. Frisch, “Geometric formulation of the Cauchy invariants for incompressible Euler flow in flat and curved spaces”, J. Fluid Mech. 825 (2017) 412-478.

T.D. Drivas, T.M. Elgindi, “Singularity formation in the incompressible Euler equation in finite and infinite time”, arXiv:2203.17221v1 [math.AP] 2022.

T.M. Elgindi, “Finite-time singularity formation for $C^{1,\alpha}$ solutions to the incompressible Euler equations on R^3”; Ann. Math. 194 (2021): 647-727.

T.M. Elgindi, I-J. Jeong, “Finite-time singularity formation for strong solutions to the axi- symmetric 3D Euler equations”, Annals of PDE 5 (2019) 1-51.

T. Hertel, N. Besse, U. Frisch, “The Cauchy-Lagrange method for 3D-axisymmetric wall-bounded and potentially singular incompressible Euler flows”, J. Comput. Phys. 449 (2022) 110758.

M. Hernandez, “Mechanisms of Lagrangian analyticity in fluids”, Arch. Rational Mech. Anal. 233 (2019) 513-588.

T.Y. Hou, D. Huang, “Potential singularity formation of 3D axisymmetric Navier-Stokes equations with degenerate variable diffusion coefficients”, arXiv:2102.06663v1 [math.AP] (2021).

M. Kono, P.H. Roberts, “Recent geodynamo simulations and observations of the geomagnetic field”, Rev. Geophys. 40 (2002) 1–53.

G. Luo, T.Y. Hou, “Toward the finite-time blowup of the 3D axisymmetric Euler equations: a numerical investigation", Multiscale Model. Simul. 12, (2014) 1722-1776.

P.D. Mininni, D.C. Montgomery, L. Turner, “Hydrodynamic and magnetohydrodynamic computations inside a rotating sphere”, New J. Phys. 9 (2007) 303.

R.D. Nair, S.J. Thomas, R.D. Loft, “A discontinuous Galerkin global shallow water model”, Mon. Wea. Rev. 133 (2005) 876–888.

K. Zhang, G. Schubert, “Magnetohydrodynamics in rapidly rotating spherical systems”, Annu. Rev. Fluid Mech. 32 (2000) 409–443.