

Transformée de Fourier, Rappels - Yves Rabbia, Observatoire de la Côte d'Azur. Tome 2  
Notes de cours provisoires, à corriger , à compléter

### 3. Transformée de Fourier à deux variables

Le plan

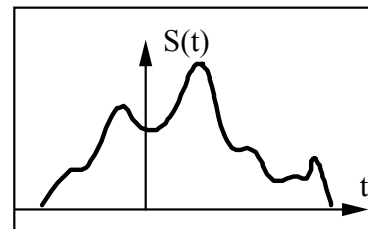
- 3.1 problème posé et notion de fréquence spatiale
- 3.2 définition et propriétés algébriques
- 3.3 fonctions usuelles et produit direct
- 3.4 convolution et théorèmes outils
- 3.5 transformée de Hankel

#### 3.1 problème posé et notion de fréquence spatiale

On a vu dans le cas de signaux temporels les possibilités offertes par la TF pour l'analyse comme pour la synthèse de ces signaux. Ils sont décrits par des fonctions ( ou distributions) à 1 variable. Deux descriptions existent : l'une, temporelle directement perceptible avec un oscillographe ( espace direct) l'autre en termes de fréquences ou de spectre ( espace de Fourier) , plus difficile à concevoir, mais finalement bien perceptible si l'on pense au timbre d'un instrument, et encore plus si l'on a vu fonctionner un analyseur de spectre.

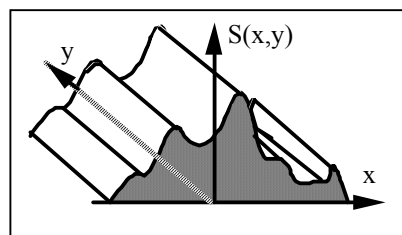
Cette expérience, une fois familière permet d'appréhender le formalisme de Fourier dans le cas de signaux de nature quelconque mais gouvernés par une seule variable.

Le problème posé dans ce cas est la representation d'une fonction d'une variable presque quelconque, en termes de fonctions de base ( kit, lego, vecteurs,etc...).



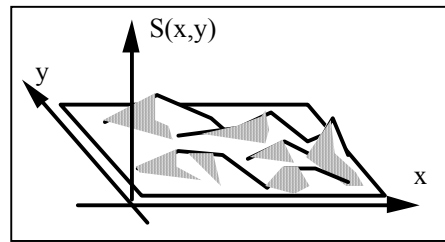
Plus difficile à concevoir est le cas de signaux à deux variables. Du point de vue de l'algèbre la difficulté est modeste dès l'instant qu'on est habitué aux manipulations des fonctions à deux variables, mais l'interprétation physique fait un peu défaut pour aider à la compréhension. Alors que pour le problème à une dimension, le modèle conceptuel était celui de fréquence temporelle, on doit ici faire intervenir le concept de fréquence spatiale.

Imaginons le même problème posé pour une distribution de brillance périodique qui s'étale sur une portion de plan, sorte de tôle multi-ondulée par exemple ( voir figure) .

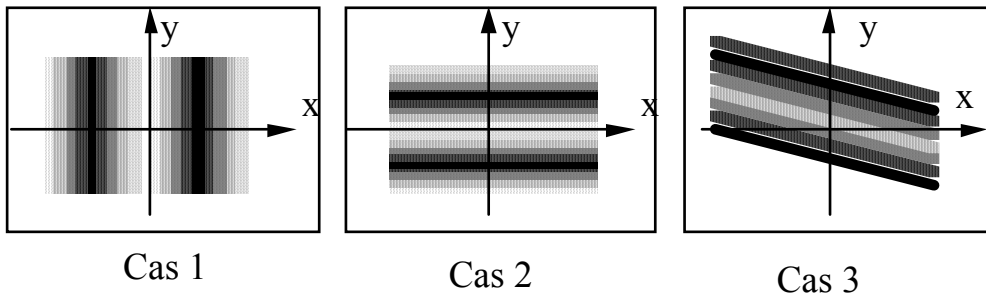


Un premier réflexe est de recourir au formalisme de Fourier à une variable pour décrire une coupe selon la direction appropriée. On aura donc une coordonnée "active" et une coordonnée "passive" destinée à manifester le caractère bidimensionnel ( voir figure).

Cette approche devient totalement inopérante si l'on veut passer des distributions "ondulées" à des distributions "cabossées". On peut imaginer comme motif l'altitude des montagnes ou la hauteur des vagues.



Pourtant la décomposition "harmonique" est encore possible : le tout est de considérer des "fonctions de base" ondulantes mais dont les ondulations ont toutes les orientations possibles, comme n'importe quel vecteur du plan ( voir figure suivante, cas 3).



Il s'agit maintenant de rendre mathématiquement palpables ces ondulations. Un auxiliaire commode pour cela est le lieu des points d'égal phase ( ligne équiphasse ou front équiphasse).

Décrivons notre tôle ondulée par l'altitude  $h(x,y)$  d'un point courant de coordonnées  $(x,y)$

Dans le premier cas de figure on a :  $h(x,y) = A \cos(2\pi \cdot u \cdot x)$  = indépendant de "y". Le paramètre "u" décrit le nombre d'ondulations par unité de longueur.

Le front équiphasse est décrit par une expression du type  $x = \text{constante}$  ( une parallèle à la direction des "y")

Dans le deuxième cas de figure on a :  $h(x,y) = A \cos(2\pi \cdot v \cdot y)$  = indépendant de "x". Ici on écrira  $y = \text{constante}$  pour décrire le front équiphasse.

Jusqu'ici on s'est maintenu dans le cas " 1 variable", l'aspect bidimensionnel reste virtuel grâce au choix terriblement astucieux de l'orientation du repère. Mais un tel choix n'est pas toujours possible ( montagnes ou vagues de la mer) et l'on est bien obligé de rencontrer le troisième cas de figure.

Ici il faut rendre compte d'une variation d'altitude de période " $p_x$ " quand on se déplace dans la direction des "x", et d'une variation de période " $p_y$ " dans la direction des "y".

L'expression du front équiphasse est une situation qu'on reconnaît au premier coup d'oeil. Commençons par là, c'est l'expression d'une droite dans le plan  $(x,y)$ . On peut écrire  $y = a \cdot x + b$ , mais on peut aussi écrire quelque chose de la forme  $u \cdot x + v \cdot y = \text{constante}$ , ( constante qui va déterminer la valeur de la phase portée par ce front).

L'interprétation est immédiate :

$u = \frac{1}{p_x}$  est la fréquence spatiale selon "x" ( nombre de périodes par unité de longueur )

$v = \frac{1}{p_y}$  est la fréquence spatiale selon "y".

Autre approche :

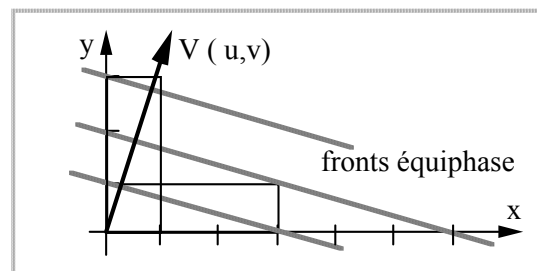
La fréquence spatiale à représenter peut être décrite par un vecteur  $\vec{V}$  normal à la direction des " vagues". Ses composantes sont alors "u" et "v" : inverses des périodes sur chaque axe ( voir figure).

Le point (x,y) peut être décrit par le vecteur  $\vec{P}$  de composantes ( x - 0) et ( y - 0). Le front équi-phase est l'ensemble des points (x,y) tels que la projection de  $\vec{P}$  sur  $\vec{V}$  est constante. Cette projection se calcule par le produit scalaire  $\vec{P} \cdot \vec{V} = u.x + v.y$

Exemple :

La période selon "x" est trois fois plus grande que la période selon "y".

La fréquence spatiale est par conséquent trois fois moindre. Cela apparait bien sur les composantes du vecteur  $\vec{V}$  normal aux vagues ( fronts "équi-phase").



Remarque :

Cette approche vectorielle est utile pour passer aux coordonnées polaires ( module et argument,  $\rho$  et  $\theta$ )

Le produit scalaire  $\vec{P} \cdot \vec{V} = u.x + v.y$ , s'écrit aussi  $\vec{P} \cdot \vec{V} = \rho.\mu. \cos(\theta - \phi)$  en posant

$$x = \mu. \cos \phi \quad y = \mu. \sin \phi \quad \text{et} \quad u = \rho. \cos \theta \quad v = \rho. \sin \theta$$

Cette remarque nous sera utile plus loin.

### Résumons :

Nous avons admis de représenter un signal à 1 variable par une décomposition sur une base formée par les fonctions  $\exp(i 2\pi.u.x)$ , où "u" représente une fréquence ( au sens le plus large, qui est celui de coordonnées conjuguée de "x", c'est-à-dire que le produit "u.x "est sans dimension).

A la suite des considérations précédentes, nous pouvons concevoir une extension de cette idée au cas d'un signal à deux variables : cela veut dire qu'au lieu d'une seule coordonnée dans l'espace direct, nous devons considérer un couple de coordonnées. Cela veut dire aussi qu'au lieu d'une seule coordonnée pour représenter une "fréquence" dans l'espace de Fourier il nous faudra considérer un couple de coordonnées. En d'autres termes, nous avons pu nous convaincre que la décomposition d'un signal bidimensionnel peut se faire à l'aide de fonctions exponentielles complexes telles que  $\exp(i.2\pi. \vec{P} \cdot \vec{V})$  où  $\vec{P}$  repère un point dans l'espace direct et où  $\vec{V}$  repère une fréquence dans l'espace de Fourier. A part cela rien de changé. Si un petit détail : la "longueur d'onde" dans notre modèle "tôle ondulée oblique" n'est pas  $\frac{1}{u}$  et n'est pas non plus  $\frac{1}{v}$ , c'est  $\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ .

**Attention**, reste à prouver que ces fonctions constituent bien une base et tout et tout.

Cela nous ne l'avons pas fait, mais nous l'admettons.

### 3.2 Définition et propriétés algébriques

La fin du paragraphe précédent est déjà une manière de définition, mais précisons les choses du point de vue algébrique. Nous adopterons la définition suivante :

Etant donnée une fonction  $f : \begin{matrix} \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \text{--->} & \mathbf{C} \\ (x;y) & \text{|-->} & f(x;y) \end{matrix}$  qui remplit les "conditions appropriées" ( définies ailleurs) nous appellerons Transformée de Fourier de  $f$ , la fonction  $\hat{f}$  définie par

$$\hat{f} : \begin{matrix} \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \text{--->} & \mathbf{C} \\ (u;v) & \text{|-->} & \hat{f}(u;v) = \int f(x;y) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot (u \cdot x + v \cdot y)) \cdot dx \cdot dy \end{matrix}$$

**Remarque :** je noterai très souvent une intégrale double au moyen d'un seul signe somme. Les bornes étant en général infinies il n'y a pas de risque de confusion. Si elles ne sont pas infinies je noterais avec un double signe "somme".

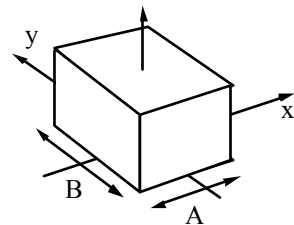
Les propriétés algébriques telles que linéarité, parité et conjugaison complexe se transposent sans trop de problèmes depuis le cas à une variable. Pour la parité c'est un plus délicat car il peut y avoir parité par rapport à une variable et pas par rapport à l'autre.

### 3.3 Fonctions usuelles et produit direct

#### \$ pavé ( extension à 2 variables de la "porte")

On notera  $\Pi(\frac{x}{A}, \frac{y}{B})$  la pavé d'extension A selon x et d'extension B selon y avec :

$$\Pi(\frac{x}{A}, \frac{y}{B}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{ |x| < \frac{A}{2} \text{ et } |y| < \frac{B}{2} \} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

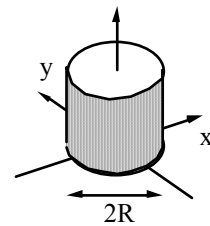


#### \$ fonction camembert ( sorte de porte circulaire)

En coordonnées polaires :  $x = \rho \cdot \cos\theta$   $y = \rho \cdot \sin\theta$  et  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\hat{\Pi}(\frac{\rho}{2R}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho < R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

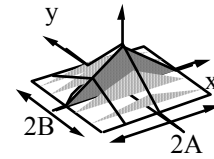
ou aussi bien  $\hat{\Pi}(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2R}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} < R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



En fait, le plus souvent, j'utiliserai la notation  $\hat{\Pi}$  aussi pour cette fonction (commodité d'écriture)

**§ triangle ( ou tente de camping)**

$$\Lambda\left(\frac{x}{A}, \frac{y}{B}\right) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x|}{A}\right) \cdot \left(1 - \frac{|y|}{B}\right) & \text{si } |x| < A \text{ et } |y| < B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

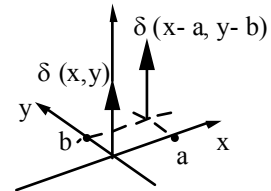


**§ Dirac et Dirac décalé.**

Même approche par limite que pour le cas à une variable.

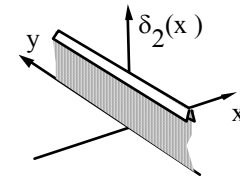
Les fonctions d'approche  $g_{\xi,\eta}$  deviennent alors  $\frac{1}{\xi,\eta} \cdot \Pi\left(\frac{x}{\xi}, \frac{y}{\eta}\right)$

ou encore  $\frac{1}{\xi,\eta} \cdot \exp\{-\pi \cdot [(\frac{x}{\xi})^2 + (\frac{y}{\eta})^2]\}$  ou etc,...



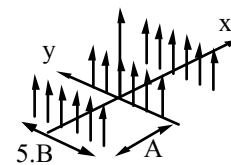
**§ mur de Dirac**

On peut être amené à considérer un comportement "à la Dirac" selon "x" seulement et pas selon "y". On peut alors noter  $\delta_2(x)$  pour le mur parallèle à l'axe des "y" et  $\delta_2(y)$  pour le mur parallèle à l'axe des "x".



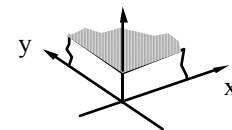
**§ brosse de Dirac ( transposition du peigne)**

$$\text{III}\left(\frac{x}{A}, \frac{y}{B}\right) = |A \cdot B| \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n \cdot A, y - k \cdot B)$$



**§ Heaviside**

$$H(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



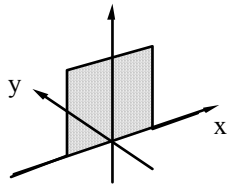
**Produit direct**

Il arrive que l'on ait  $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ . On dit alors que f est le produit direct de  $f_1$  par  $f_2$ .

Pour parler proprement de ces questions il faut un peu développer les choses mathématiquement. Nous ne le ferons pas, pour nos besoins il est suffisant de voir que certaines des fonctions que nous venons de définir s'écrivent sous une autre forme et qu'il y a là une certaine commodité pour en exprimer la TF.

Exemples :  $\Pi(x,y) = \Pi(x) \circ \Pi(y) \rightarrow \hat{\Pi}(u) \circ \hat{\Pi}(v)$  et  $\delta_2(x) = \delta(x) \circ \mathbf{1}_y$  avec pour TF :  $\mathbf{1}_u \circ \delta(v)$

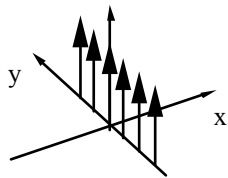
Amusons nous un peu avec ça : il sagit de donner une expression des fonctions décrites graphiquement ci après.



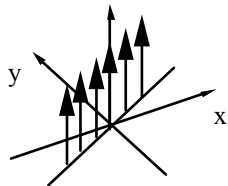
on peut écrire  $\Pi(x,y) \cdot \delta_2(y)$   
 ce qui s'écrit aussi  $(\Pi(x) \circ \Pi(y)) \cdot (\mathbf{1}_x \circ \delta(y))$  et encore  $(\Pi(x) \cdot \mathbf{1}_x) \circ (\Pi(y) \cdot \delta(y))$   
 soit  $\Pi(x) \circ \delta(y)$

Attention n'allez pas tout de suite penser à de la distributivité etc etc..

C'est juste un exemple, il n'y a rien de général .



on peut écrire :  $\text{III}(x,y) \cdot \delta_2(x) = (\text{III}(x) \circ \text{III}(y)) \cdot (\delta(x) \circ \mathbf{1}_y)$   
 soit aussi  $(\text{III}(x) \cdot \delta(x)) \circ (\text{III}(y) \cdot \mathbf{1}_y) = \delta(x) \circ \text{III}(y)$



ça c'est un peu pervers, je l'ai fait par hasard. Qu'est-ce que ça peut-être ?  
 Les diracs se disposent selon une droite telle que  $y = ax+b$ . Nous avons une  
 somme de diracs décalés  $\sum_n \delta(x - x_n ; y - y_n)$  avec la relation à satisfaire  $y_n =$

$$a \cdot x_n + b. \text{ Une notation possible ? } \sum_n \delta(x - x_n) \circ \sum_n \delta(y - a \cdot x_n + b)$$

### 3.4 Convolution et Théorèmes "outils"

#### Convolution :

Sans reprendre la définition complète de la convolution , il nous suffit d'expliciter la notation  $f(x,y) * g(x,y)$

$$f(x,y) * g(x,y) = \int \int f(t, z) \cdot g(x - t, y - z) \cdot dt \cdot dz$$

Dorénavant, je mettrai un seul signe "somme".

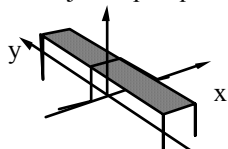
**Remarque :** Si d'aventure nous avons des produits directs nous voyons que :

$$f(x,y) * g(x,y) = \int (f_1(t) \circ f_2(z)) \cdot (g_1(x - t) \circ g_2(y - z)) \cdot dt \cdot dz = \int (f_1(t) \cdot g_1(x - t)) \circ (f_2(z) \cdot g_2(y - z)) \cdot dt \cdot dz$$

qu'on a envie de transformer en  $[f_1(x) * g_1(x)] \circ [f_2(y) * g_2(y)]$ .

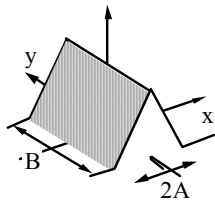
**Attention**, c'est à prendre avec précautions, rien n'est démontré ici.

Voici juste quelques exemples où cela fonctionne:

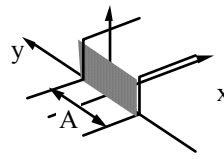


$$\Pi(x,y) \cdot \delta_2(y) * \delta_2(x) = \Pi(x) \circ \delta(y) * \delta(x) \circ \mathbf{1}_y = \Pi(x) * \delta(x) \circ \delta(y) * \mathbf{1}_y$$

soit encore  $\Pi(x) \circ \mathbf{1}_y$ .



$$\Lambda\left(\frac{x}{A}\right) \circ \Pi\left(\frac{y}{B}\right)$$



$$H(x) \circ \Pi\left(\frac{y}{A}\right)$$

**Pour les théorèmes** il s'agit essentiellement de bien gérer la notation à deux variables, il n'y a pas de problèmes majeurs dans la transposition depuis le cas à une variable.

On part de :

$$f(x,y) \xrightarrow[\leftarrow]{\text{TF}} \hat{f}(u,v) \quad \text{et} \quad g(x,y) \xrightarrow[\leftarrow]{\text{TF}} \hat{g}(u,v)$$

**Translation**

$$f(x-a,y-b) \xrightarrow[\leftarrow]{\text{TF}} \hat{f}(u,v) \cdot \exp(-i.2\pi.u.a) \cdot \exp(-i.2\pi.v.b)$$

clef : écrire la définition, puis changement de variable et sortir de l'intégrale les facteurs "exponentielle complexe"

**Similitude**

$$f(a.x,b.y) \xrightarrow[\leftarrow]{\text{TF}} \frac{1}{|a|.|b|} \cdot \hat{f}\left(\frac{u}{a}; \frac{v}{b}\right)$$

clef : écrire la définition et poser  $u = \frac{x}{a}$  et  $v = \frac{y}{b}$  puis changement de variable.

**Convolution**

$$f(x,y) * g(x,y) \xrightarrow[\leftarrow]{\text{TF}} \hat{f}(u,v) \cdot \hat{g}(u,v)$$

clef : écrire la définition, ce qui donne une intégrale sur "x" d'une intégrale sur "t". Echanger l'ordre des intégrations et utiliser le théorème de translation.

**Parseval-Plancherel ( Rayleigh ) :**

$$\int f(x,y) \cdot g(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int \hat{f}(u,v) \cdot \hat{g}(u,v) \cdot du \cdot dv$$

clef : écrire que le premier membre est la TF du produit f.g, prise à l'origine. Utiliser le théorème de convolution et écrire la convolution à l'origine.

**Autocorrélation :**

$$f(x,y) \otimes f(x,y) \xrightarrow[\leftarrow]{\text{TF}} \left| \hat{f}(u,v) \right|^2$$

Clef : Prendre la TF inverse de  $\left| \hat{f}(u,v) \right|^2$  et se souvenir de la relation symbolique

$$f(x,y) * f^*(-x,-y) = \int f(t;z) \cdot f^*(-(x-t); -(y-z)) \cdot dt \cdot dz = \int f(t;z) \cdot f^*(t-x;z-y) \cdot dt \cdot dz = f(x,y) \otimes f(x,y)$$

Similaire pour intercorrelation de f et g.

**Dérivation :**

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \xrightarrow[\leftarrow]{\text{TF}} i.2\pi.u \cdot \hat{f}(u,v)$$

Clef : Ecrire que f est la TF inverse de  $\hat{f}$ , dériver la TF inverse par rapport à x.

Similaire pour  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et pour  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . On peut aussi partir de la définition d'une dérivée.

Illustration : expliciter l'expression de  $\frac{\partial \Pi(x,y)}{\partial x}$ .

### 3.5 Transformée de Hankel

Voyons d'abord un théorème :

*La TF d'une fonction à symétrie circulaire est une fonction à symétrie circulaire.*

Une fonction "f" est dite à symétrie circulaire si son expression en coordonnées polaires est indépendante de l'argument, c'est-à-dire si  $f(\rho, \phi)$  se réduit à  $f(\rho)$ .

Exemple : la fonction camembert, qu'on peut écrire  $\Pi\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2R}\right)$ .

En posant  $x = \rho \cdot \cos\phi$  et  $y = \rho \cdot \sin\phi$  on passe aux coordonnées polaires. Son expression sous la forme  $f(\rho, \phi)$  est :  $\Pi\left(\frac{\rho}{2R}\right)$  indépendante de  $\phi$ .

Démontrons le théorème : on écrit la définition de la TF avec  $\vec{P}$  pour représenter le point de coordonnées (x,y) ou  $(\rho, \phi)$  et  $\vec{V}$  pour représenter le vecteur fréquence  $(\mu, \theta)$  ou  $\mu = \sqrt{u^2 + v^2}$ . L'élément de surface pour les

(x,y) est  $d\sigma$  qui s'écrit aussi  $\rho \cdot d\rho \cdot d\phi$ . On a  $\hat{f}(\mu; \theta) = \int f(\rho; \phi) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot \vec{P} \cdot \vec{V}) \cdot d\sigma$

qui se réduit à  $\hat{f}(\mu; \theta) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(\rho) \cdot \exp[-i \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot \mu \cdot \cos(\phi - \theta)] \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi$

Un changement de variable tel que  $\alpha = \phi - \theta$  ne résulte qu'en un changement de bornes lequel n'affecte pas le résultat. Il existe une relation :  $\int_0^{2\pi} \exp(-i \cdot z \cdot \cos\omega) \cdot d\omega = 2\pi \cdot J_0(z)$ , où  $J_0$  est une fonction de Bessel. On peut

alors réduire notre expression à :

$$\hat{f}(\mu; \theta) = 2\pi \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \cdot J_0(2\pi \cdot \rho \cdot \mu) \cdot \rho \cdot d\rho = \hat{f}(\mu) \quad \text{car il n'y a plus de dépendance en } \theta.$$

Ce qui démontre le théorème.

L'expression obtenue  $\hat{f}(\mu) = 2\pi \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \cdot J_0(2\pi \cdot \rho \cdot \mu) \cdot \rho \cdot d\rho$  définit une nouvelle transformation dite de

Hankel. La transformée inverse est totalement similaire :  $f(\rho) = \int_0^{+\infty} \hat{f}(\mu) \cdot J_0(2\pi \cdot \rho \cdot \mu) \cdot \mu \cdot d\mu$

La plus célèbre des Transformées de Hankel est sans doute celle de la fonction camembert, elle s'obtient au

moyen de la relation générale :  $\int_0^1 X^{v+1} \cdot J_v(a \cdot X) \cdot dX = \frac{J_{v+1}(a)}{a}$  (où l'on pose  $v = 0$ )

et du changement de variable  $X = \frac{\rho}{R}$ , d'où (voir complément sur feuille séparée)

$$\hat{\Pi}(\mu) = 2\pi \cdot \int_0^R J_0(2\pi \cdot \rho \cdot \mu) \cdot \rho \cdot d\rho = 2\pi \cdot R^2 \cdot \int_0^1 J_0(2\pi \cdot R \cdot \mu \cdot X) \cdot X \cdot dX = \pi R^2 \cdot \frac{2 \cdot J_1(2\pi \cdot R \cdot \mu)}{2\pi \cdot R \cdot \mu}$$

Par analogie avec la notation  $\text{Sinc}(x)$ , on note parfois  $\text{Jinc}(x)$  pour résumer la notation :  $\frac{J_1(\pi \cdot x)}{\pi x}$